

- المثالية في نصف الشبكة العليا:
- إن فكرة المثالية هي نفس فكرة المرشحة مع أخذ الترتيب المعاكس.
- **تعريف:** نسمي المجموعة الجزئية غير الخالية I من نصف شبكة عليا E (مثالية) إذا تحققت:
① إذا كان $x \in I$ و $y \leq x$ فإن $y \in I$.
② إذا كان $x \in I$ و $y \in I$ فإن $x \vee y \in I$
- سوف نرى في الفصل التالي كيف أن فكرة المثالية هنا ترتبط مع فكرة المثالية في الحلقات.
- إن كل ما قيل عن المرشحات هنا يمكن أن نطبقه على المثاليات مباشرة وسوف نشير إليها باختصار.
- المثالية هي نصف شبكة عليا جزئية.
- نقول عن مثالية I أنها فعلية إذا كانت $I \neq E$ وهذا يكافئ $1 \notin F$
- $\{0\}$ هي أصغر مثالية في E و (0) ينتمي إلى جميع المثاليات.
- إذا كانت $a \in E$ فإن: $I_a = \{x \in E : x \leq a\}$ تكون مثالية وتدعى مثالية أساسية مولدة بـ a.
- إذا كانت $G \subseteq E$ فإن I_G هي عبارة عن تقاطع جميع المثاليات الحاوية للمجموعة G فإن I_G تكون مثالية تدعى المثالية المولدة بالمجموعة G وهي أصغر مثالية تحوي G ويمكن أيضاً أن نعرف I_G بأنها مجموعة العناصر x من E التي تحقق أنه يوجد عدد منتهٍ من عناصر G. $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ بحيث يكون:
$$x \leq a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$$
- كل مثالية تملك مولد منتهٍ تكون أساسية في نصف الشبكة العليا المنتهية جميع المثاليات تكون أساسية.
- نقول عن المجموعة G بأنها **$\vee$ - غير متوافقة** إذا كانت تولد مثالية غير فعلية وهذا القول يكافئ بأنه يوجد عدد منتهٍ من عناصر G مثل: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ بحيث يكون: $(a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n = 1)$
- المجموعة الجزئية التي لا تكون **$\vee$ - غير متوافقة** نقول عنها أنها **$\vee$ متوافقة**

مجموعة المثاليات مرتبة بعلاقة الاحتواء تكون (شبه استقرائية) وهذا يتيح لنا استنتاج وجود مثاليات عظمى عنصر أعظم (كل مثالية فعلية تكون محتواة في مثالية عظمى).
ويمكن القول بأن I مثالية عظمى إذا كان تحقق الشرطين التاليين:

[1] I مثالية فعلية.

[2] من أجل أي $x \notin I$ يوجد $y \in I$ بحيث يكون: $x \vee y = 1$.

*** حالة الشبكة:**

في الشبكة لدينا بنفس الوقت مفهوم المرشحة والمثالية.

- **ملاحظة:** في الشبكة أي مرشحة (أو أي مثالية) تكون شبكة جزئية، وذلك لأنه إذا كانت F مرشحة فوجدنا سابقاً بأنها نصف شبكة دنيا جزئية ولكن هي أيضاً نصف شبكة عليا جزئية فإذا كان $x \in F$ و $y \in F$ فإن:

$x \in F$ و $x \vee y \geq x$ و F مرشحة (فرضاً) $\Rightarrow x \vee y \in F$

أي أن F نصف شبكة عليا جزئية.

أي أن F شبكة جزئية من E.

- أمثلة:

[1] لتكن E مجموعة غير منتهية:

- أسرة المجموعات الجزئية المنتهية التمام من E تكون مرشحة في $P(E)$.
- أسرة المجموعات الجزئية المنتهية من E تكون مثالية في $P(E)$.

الرمز: $C(E)$ منتهية التمام في E

(1) لنأخذ مجموعة A: $A \in C(E)$ و $A \subseteq B$

$A \in C(E) \Rightarrow$ منتهية C_A و $C_B \subseteq C_A \Rightarrow$ منتهية $C_B \Rightarrow$ $B \in C(E)$

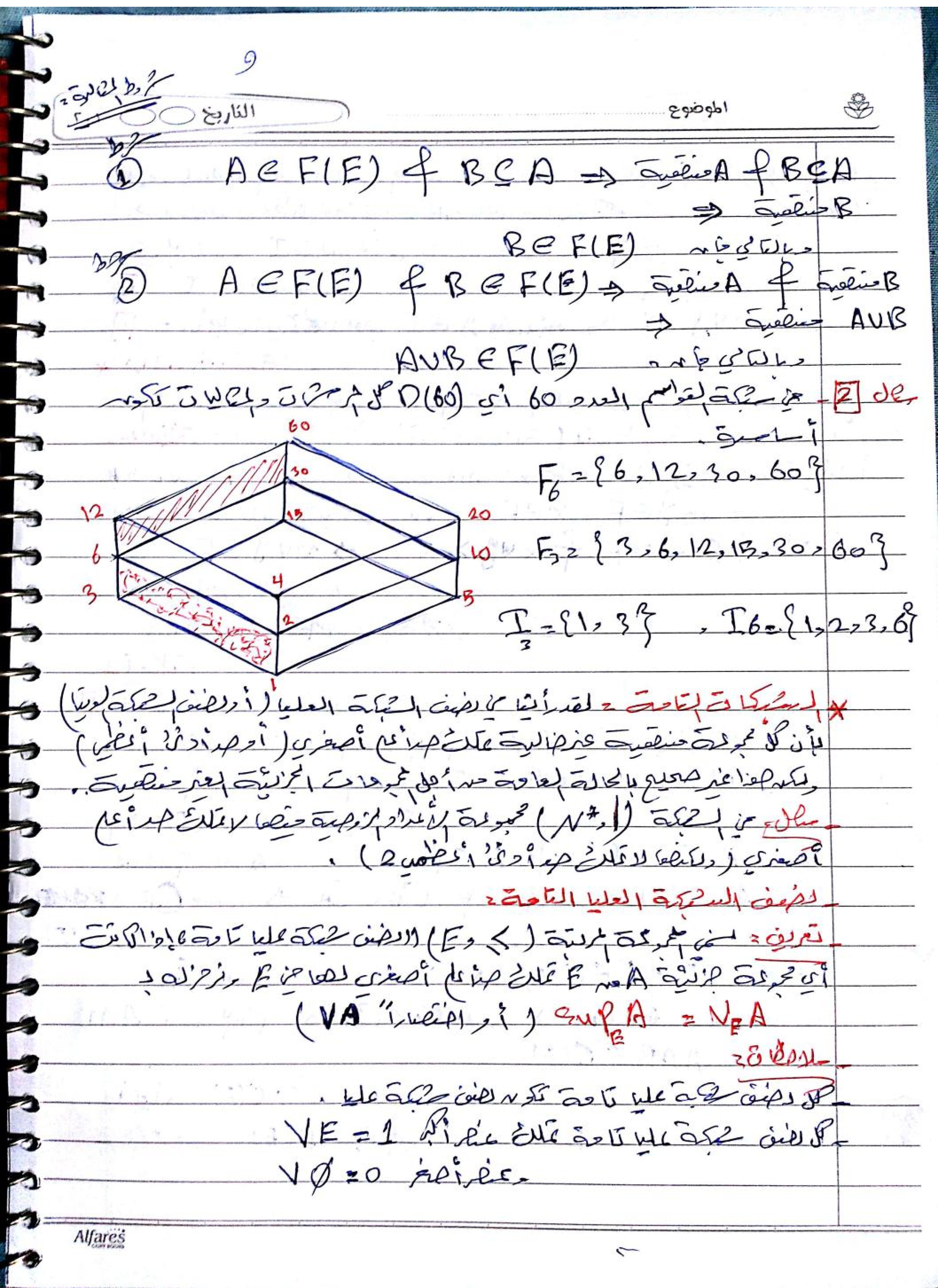
(2) $A \in C(E)$ و $B \in C(E) \Rightarrow$ منتهية C_A و منتهية C_B

$\Rightarrow$ منتهية $C_A \cup C_B \Rightarrow$ منتهية $C_{A \cap B}$ $\Rightarrow$ منتهية التمام $A \cap B$

$\Rightarrow A \cap B \in C(E)$

أي أن $C(E)$ مرشحة.

- الرمز: $F(E)$ أسرة مجموعات المنتهية من E.



9

① $A \in F(E)$ و $B \subseteq A \Rightarrow$ A منتهية و $B \subseteq A$

$\Rightarrow$ B منتهية

وبالتالي فإن $B \in F(E)$

② $A \in F(E)$ و $B \in F(E) \Rightarrow$ A منتهية و B منتهية

$\Rightarrow$ $A \cup B$ منتهية

وبالتالي فإن $A \cup B \in F(E)$

حل 2 - في شبكة القواسم العدد 60 أي D(60) كل المرشحات والمثاليات تكون أساسية.

$F_6 = \{6, 12, 30, 60\}$

$F_3 = \{3, 6, 12, 15, 30, 60\}$

$I_3 = \{1, 3\}$, $I_6 = \{1, 2, 3, 6\}$

* المشبكات التامة: لقد رأينا في نصف الشبكة العليا (أو نصف الشبكة السفليا) لأن كل مجموعة منتهية غير خالية تملك حد أعلى أصغري (أو حد أدنى أعظمي) ولكن هذا غير صحيح بالحالة العامة حيث أن المجموعات الجزئية الغير منتهية.

- مثال: في الشبكة $(|, N^*)$ مجموعة الأعداد الزوجية فيها لا تملك حد أعلى أصغري (ولكنها تملك حد أدنى أعظمي 2).

- نصف المشبكة العليا التامة:

- تعريف: نسمي مجموعة مرتبة $(E, \leq)$ نصف شبكة عليا تامة إذا كانت أي مجموعة جزئية A من E تملك حد أعلى أصغري لها في E ونرمز له بـ $\sup_E A = \vee_E A$ (أو اختصاراً $\vee A$)

- ملاحظة:

- كل نصف شبكة عليا تامة تكون نصف شبكة عليا.

- كل نصف شبكة عليا تامة تملك عنصر أكبر $\vee E = 1$

وعنصر أصغر $\vee \emptyset = 0$

مبرهنة :
في أي صنف شبكة عليا تامة كل مجموعة جزئية A منها تملك حد أدنى أعظمي.

البرهان :

إذا كانت $A = \emptyset \Leftarrow \inf_E A = 1$

إذا كانت $A \neq \emptyset$ ، لتكن M مجموعة الحدود الدنيا لـ A. (موجود على الأقل العنصر 0)

لنفرض أن $I = \vee M$

• إن I هو حد أدنى للمجموعة A.

البرهان : إذا كانت $x \in A$ (اختياريا) فإنه حد أعلى لأي $m \in M$ فإن

$m \leq x \Leftarrow x$ هو حد أعلى للمجموعة $M \Leftarrow I = \vee M \leq x$

أي أن I حد أدنى للمجموعة A.

• إن I هو حد أدنى أعظمي للمجموعة A.

لنفرض أن J هو حد أدنى آخر للمجموعة A فإن $J \in M \Leftarrow$

$J \leq \vee M = I$ ومنه نستنتج أن I حد أدنى أعظمي للمجموعة A.

أي أن $I = \inf_E A$

ملاحظة :

نستطيع أيضا أن نعرف صنف الشبكة الدنيا التامة بالشكل الآتي :

أي مجموعة جزئية A من الصنف الشبكة الدنيا تملك حد أدنى أعظمي ونرمز له

بالرمز $\wedge_E A = \inf_E A$

المبرهنة السابقة تبين بأنه صنف الشبكة العليا التامة تكون أيضا صنف شبكة دنيا

تامة وبشكل مشابه يمكن أن نبين العكس.

يمكن أن نعرف أيضا الشبكة التامة بأنها شبكة تحقق الشرط :

أي مجموعة جزئية منها A تملك بنفس الوقت حد أعلى أصغري وحد أدنى أعظمي وبناء

على ما تقدم يمكن أن نعطي المبرهنة التالية :

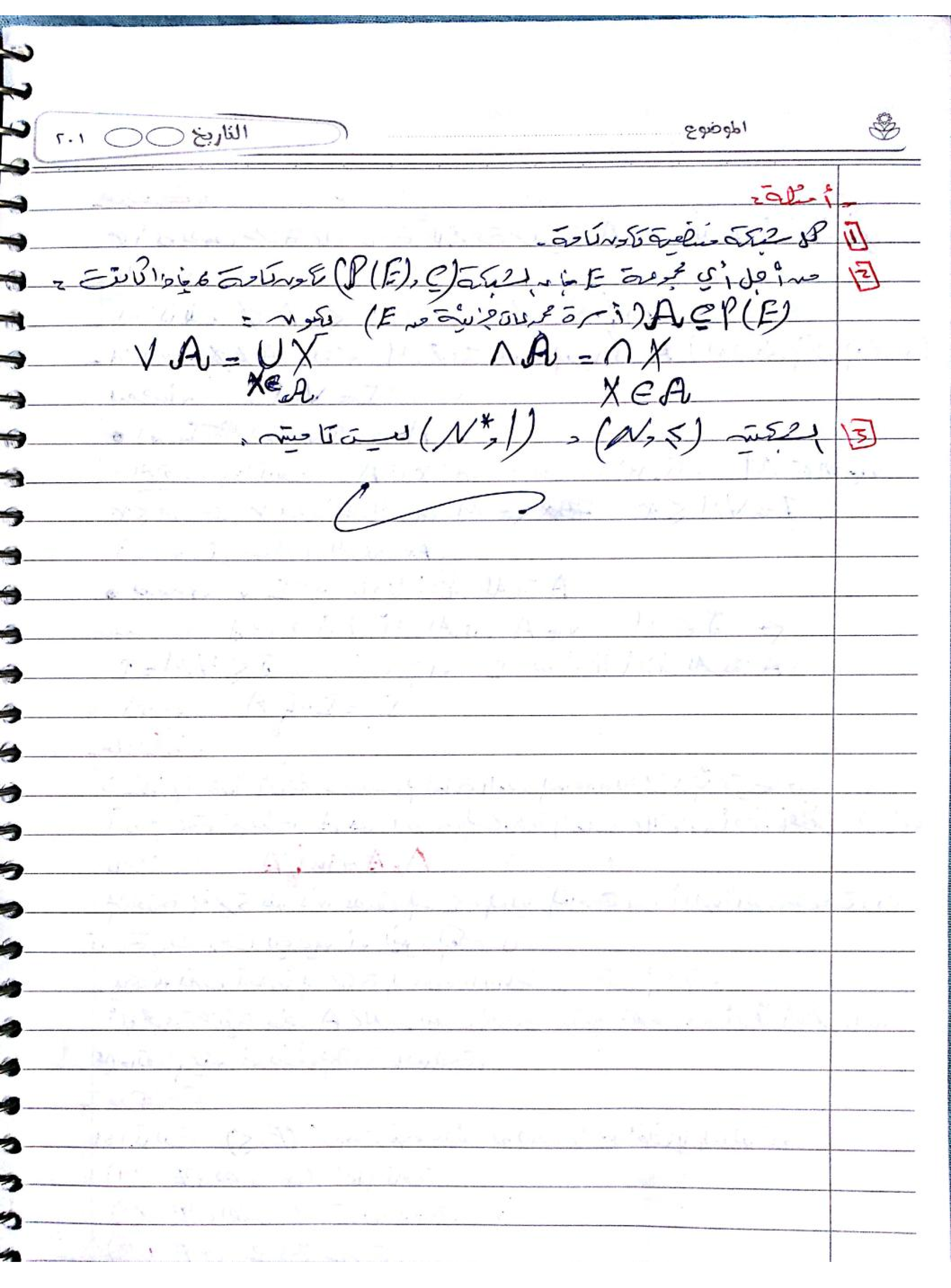
مبرهنة :

إذا كانت $(E, \leq)$ مجموعة مرتبة عندئذٍ لدينا تكافؤ بين القضايا التالية :

(1) E هو صنف شبكة عليا تامة.

(2) E هو صنف شبكة دنيا تامة.

(3) E هو شبكة تامة



أمثلة:

1. كل شبكة منتهية تكون تامة.

2. من أجل أي مجموعة E فإن الشبكة $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ تكون تامة وإذا كانت $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$ (أسرة مجموعات جزئية من E) فيكون:

$$\vee \mathcal{A} = \bigcup_{X \in \mathcal{A}} X \qquad \wedge \mathcal{A} = \bigcap_{X \in \mathcal{A}} X$$

3. الشبكتين $(\mathbb{N}, \leq)$ و $(\mathbb{N}^*, |)$ ليستا تامتين.



الخاصية التوزيعية: لتكن $(E, \leq)$ شبكة ما مزودة بقانوني تشكيل داخليين $(\wedge, \vee)$

نقول عنها إذا كان كل منهما يقبل التوزيع على الآخر، أي هل تحقق المساواتان:

D_1. $x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$; $\forall x,y,z\in E$

D_2. $x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$; $\forall x,y,z\in E$

أي أن $\vee$ يقبل التوزيع على $\wedge$.

ملاحظة: الشرطان D_1, D_2 متكافئان:

- نفرض أن D_1 محقق فإن:

$(x\vee y)\wedge(x\vee z)=[(x\vee y)\wedge x]\vee[(x\vee y)\wedge z]$ (حسب الفرض)

$=x\vee[(x\vee y)\wedge z]$ (حسب الخاصية الماصة)

$=x\vee[(x\wedge z)\vee(y\wedge z)]$ (حسب الفرض)

$=[x\vee(x\wedge z)]\vee(y\wedge z)$ (حسب الخاصية التجميعية)

$=x\vee(y\wedge z)$ (حسب الخاصية الماصة)

أي أن D_2 محقق.

لنفرض الآن أن D_2 محقق ولنبرهن صحة D_1:

$(x\wedge y)\vee(x\wedge z)=[(x\wedge y)\vee x]\wedge[(x\wedge y)\vee z]$ حسب الفرض

$=x\wedge[(x\wedge y)\vee z]$ حسب الخاصية الماصة

$=x\wedge[(x\vee z)\wedge(y\vee z)]$ حسب الفرض

$=[x\wedge(x\vee z)]\wedge(y\vee z)$ الخاصية التجميعية

$=x\wedge(y\vee z)$ الخاصية الماصة

أي أن D_1 محقق.

ملاحظة: في أي شبكة يكون الشرطين محققين:

D'_1. $x\wedge(y\vee z)\geq(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$

D'_2. $x\vee(y\wedge z)\leq(x\vee y)\wedge(x\vee z)$

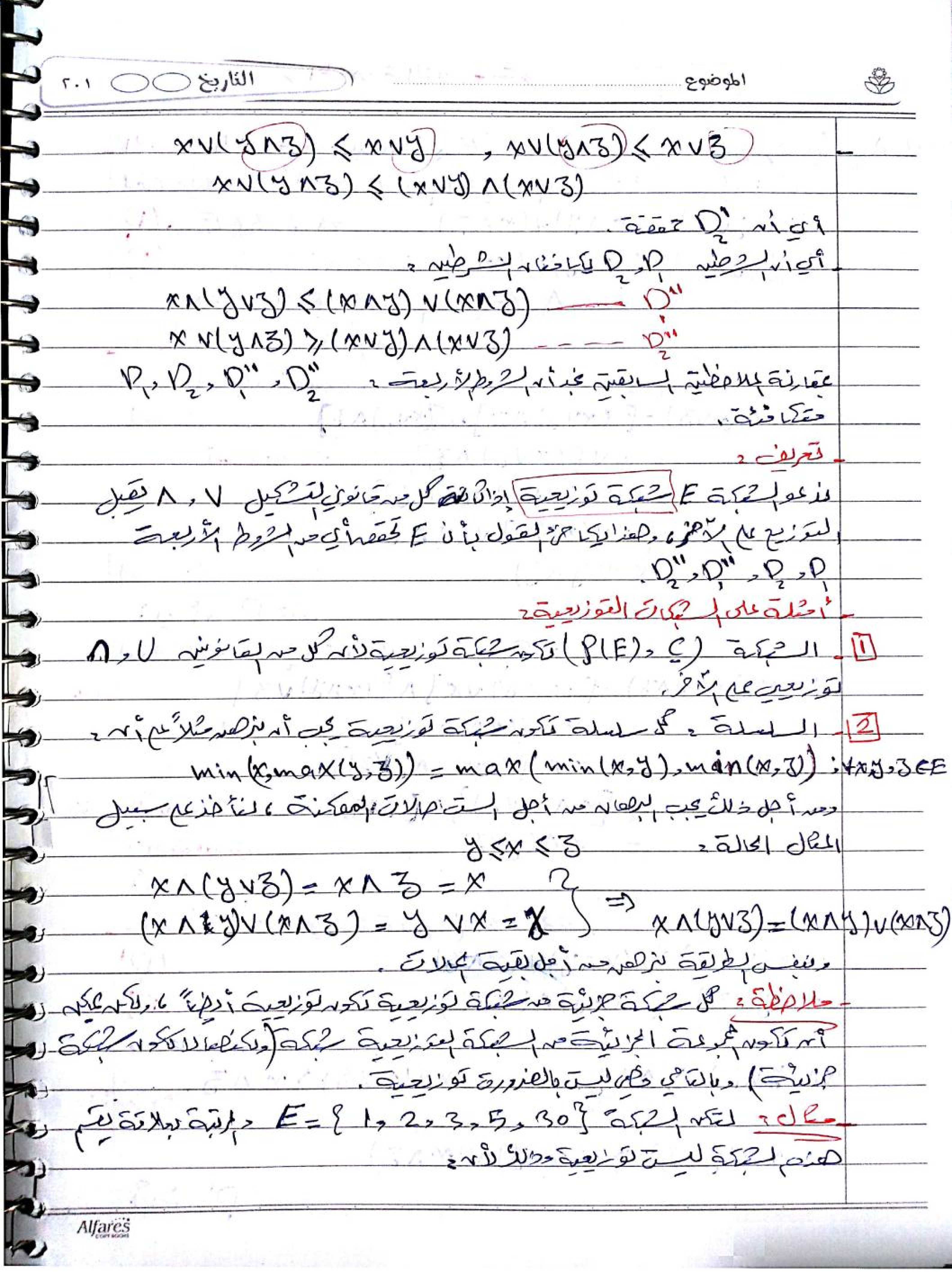
وذلك لأن:

$x\wedge(y\vee z)\geq x\wedge y$ (عنصر أصغر منه) , $x\wedge(y\vee z)\geq x\wedge z$ (عنصر أصغر منه)

$\Rightarrow x\wedge(y\vee z)\geq(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$

أي أن D'_1 محقق.

Alfares



$x\vee(y\wedge z)\leq x\vee y$, $x\vee(y\wedge z)\leq x\vee z$

$x\vee(y\wedge z)\leq (x\vee y)\wedge(x\vee z)$

أي أن D_2' محققة.

أي أن الشرطين D_1 , D_2 لا يكافئان الشرطين:

$x\wedge(y\vee z)\leq(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$ —— D_1''

$x\vee(y\wedge z)\geq(x\vee y)\wedge(x\vee z)$ - - - D_2''

بمقارنة الملاحظة السابقة نجد أن الشروط الأربعة $D_1 , D_2 , D_1'' , D_2''$ متكافئة.

تعريف:

ندعو الشبكة E شبكة توزيعية إذا كان كل من قانوني التشكيل $\vee , \wedge$ يقبل التوزيع على الآخر، وهذا يكافئ القول بأن E تحقق أي من الشروط الأربعة $D_1 , D_2 , D_1'' , D_2''$.

أمثلة على الشبكات التوزيعية:

1- الشبكة $(P(E) , \subseteq)$ تكون شبكة توزيعية لأن كل من القانونين $\cup , \cap$ توزيعي على الآخر.

2- السلسلة: كل سلسلة تكون شبكة توزيعية يجب أن نبرهن مثلاً على أن:

$\min(x,\max(y,z)) = \max(\min(x,y),\min(x,z)) \ ; \forall x,y,z\in E$

ومن أجل ذلك يجب البرهان من أجل الست حالات الممكنة، ولنأخذ على سبيل المثال الحالة: $y\leq x\leq z$

$x\wedge(y\vee z) = x\wedge z = x$

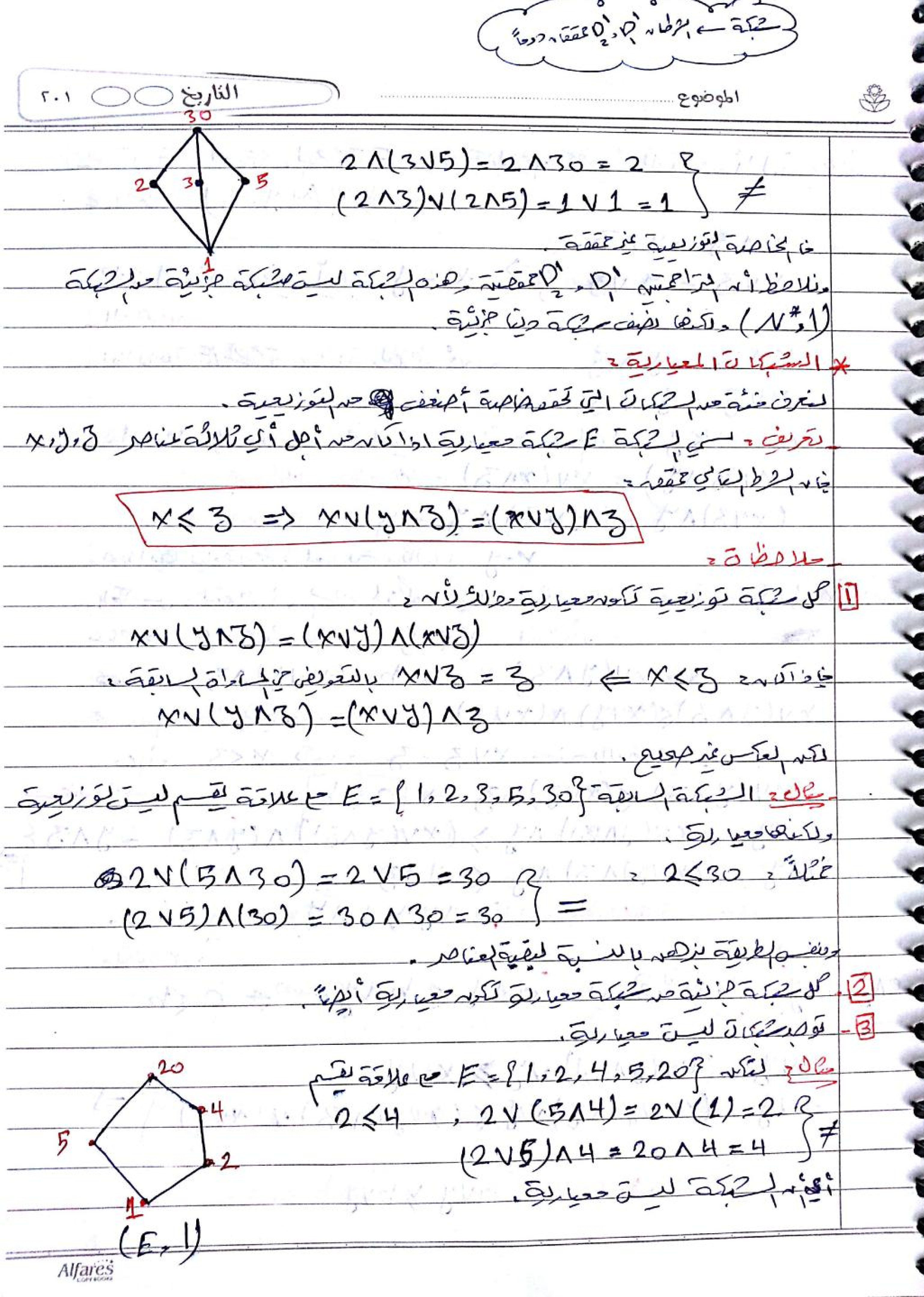
$(x\wedge y)\vee(x\wedge z) = y\vee x = x$ } $\Rightarrow x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$

وبنفس الطريقة نبرهن من أجل بقية الحالات.

ملاحظة: كل شبكة جزئية من شبكة توزيعية تكون توزيعية أيضاً، ولكن يمكن أن تكون مجموعة جزئية من الشبكة التوزيعية شبكة (ولكنها لا تكون شبكة جزئية) وبالتالي فهي ليست بالضرورة توزيعية.

مثال: لتكن الشبكة $E=\{1,2,3,5,30\}$ المرتبة بعلاقة يقسم

هذه الشبكة ليست توزيعية وذلك لأن:



شبكة ← بالرطين D'_1 و D'_2 محققتان دوماً

$$2\wedge(3\vee5) = 2\wedge30 = 2$$
$$(2\wedge3)\vee(2\wedge5) = 1\vee1 = 1$$
$\neq$

فالخاصة التوزيعية غير محققة.

ونلاحظ أنه بتراجحتي D'_1 و D'_2 محققتين، وهذه الشبكة ليست شبكة جزئية من الشبكة $(\mathbb{N}^*, |)$ ولكنها تخضع لشبكة دنيا جزئية.

* الشبكات المعيارية:

لنعرّف فئة من الشبكات التي تحقق خاصية أضعف من التوزيعية.

تعريف: نسمي الشبكة E شبكة معيارية إذا كان من أجل أي ثلاثة عناصر x, y, z فإن الشرط التالي محقق:

$$x \leq z \Rightarrow x\vee(y\wedge z) = (x\vee y)\wedge z$$

ملاحظة:

[1] كل شبكة توزيعية تكون معيارية وذلك لأن:

$$x\vee(y\wedge z) = (x\vee y)\wedge(x\vee z)$$

فإذا كان $x \leq z \Leftarrow x\vee z = z$ بالتعويض في المساواة السابقة:

$$x\vee(y\wedge z) = (x\vee y)\wedge z$$

لكن العكس غير صحيح.

مثال: الشبكة السابقة $E = \{1, 2, 3, 5, 30\}$ مع علاقة القسمة ليست توزيعية ولكنها معيارية.

مثلاً: $2 \leq 30$:

$$2\vee(5\wedge30) = 2\vee5 = 30$$
$$(2\vee5)\wedge(30) = 30\wedge30 = 30$$
$=$

وبنفس الطريقة نبرهن بالنسبة لبقية العناصر.

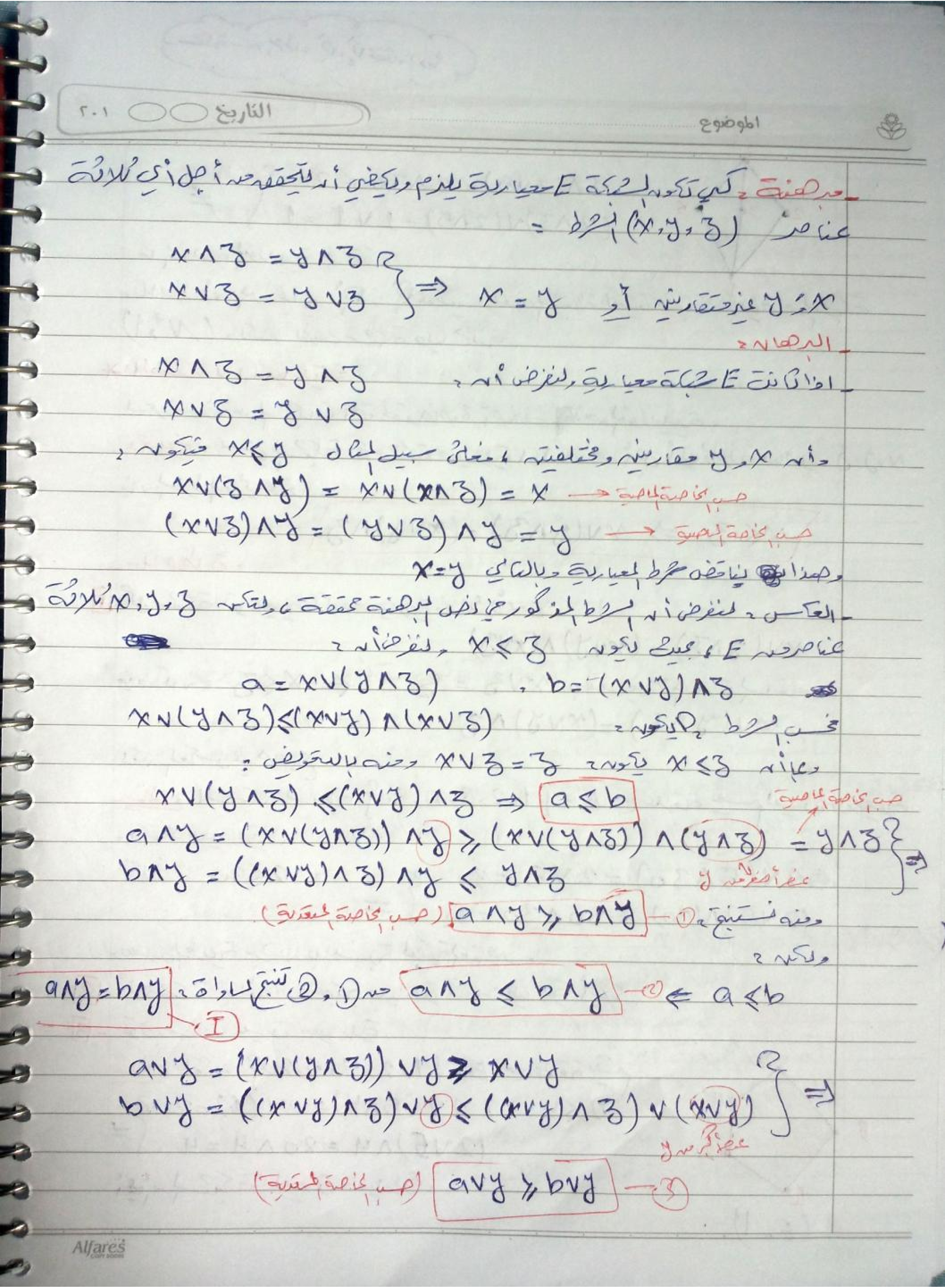
[2] كل شبكة جزئية من شبكة معيارية تكون معيارية أيضاً.

[3] توجد شبكات ليست معيارية.

مثال: لتكن $E = \{1, 2, 4, 5, 20\}$ مع علاقة القسمة

$$2 \leq 4 \quad , \quad 2\vee(5\wedge4) = 2\vee(1) = 2$$
$$(2\vee5)\wedge4 = 20\wedge4 = 4$$
$\neq$

أي أن الشبكة ليست معيارية.



- مبرهنة: كي تكون الشبكة E معيارية يلزم ويكفي أن تتحقق من أجل أي ثلاثة عناصر (x, y, z) الشرط:

$$\left.\begin{array}{l} x\wedge z = y\wedge z \\ x\vee z = y\vee z \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$$

أي x, y غير متقارنين

- البرهان:

- إذا كانت E شبكة معيارية، لنفرض أن:

$$x\wedge z = y\wedge z$$
$$x\vee z = y\vee z$$

وأن x, y متقارنين ومختلفين، فمثلاً على سبيل المثال $x\leq y$ فيكون:

$$x\vee(z\wedge y) = x\vee(x\wedge z) = x$$ ← حسب خاصية الماصة

$$(x\vee z)\wedge y = (y\vee z)\wedge y = y$$ ← حسب خاصية الماصة

وهذا يناقض شرط المعيارية وبالتالي $x=y$

- العكس: لنفرض أن الشرط المذكور في المبرهنة محققة، ولتكن x, y, z ثلاثة عناصر من E، بحيث يكون $x\leq z$، لنفرض أن:

$$a = x\vee(y\wedge z) \quad , \quad b = (x\vee y)\wedge z$$

حسب شرط ... يكون:

$$x\vee(y\wedge z)\leq(x\vee y)\wedge(x\vee z)$$

وبما أن $x\leq z$ يكون $x\vee z = z$ ومنه بالتعويض:

$$x\vee(y\wedge z)\leq(x\vee y)\wedge z \Rightarrow \boxed{a\leq b}$$ حسب خاصية الماصة

$$\left.\begin{array}{l} a\wedge y = (x\vee(y\wedge z))\wedge y \geq (x\vee(y\wedge z))\wedge(y\wedge z) = y\wedge z \\ b\wedge y = ((x\vee y)\wedge z)\wedge y \leq y\wedge z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

عنصر أصغر من y

ومنه نستنتج: ① ← $\boxed{a\wedge y \geq b\wedge y}$ (حسب خاصية المتعدية)

ولكن:

$$a\leq b \Rightarrow \boxed{a\wedge y\leq b\wedge y}$$ ← ②

من ① و ② نستنتج المساواة: $\boxed{a\wedge y = b\wedge y}$ (I)

$$\left.\begin{array}{l} a\vee y = (x\vee(y\wedge z))\vee y \geq x\vee y \\ b\vee y = ((x\vee y)\wedge z)\vee y \leq ((x\vee y)\wedge z)\vee(x\vee y) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

عنصر أكبر من y

③ ← $\boxed{a\vee y \geq b\vee y}$ (حسب خاصية المتعدية)

وليكن $a \leq b$ ⟸ (٤) $a \vee y \leq b \vee y$ من (٣) و (٤) تنتج المساواة

$a \vee y = b \vee y$ --- (II)

من (I) و (II) وبالاعتماد على الفرض الشرط محقق وينتج أن $a = b$ أي أن

$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$ فالشبكة معيارية.

مبرهنة:

حتى تكون الشبكة E توزيعية يلزم ويكفي أن يكون من أجل أي ثلاثة عناصر x, y, z

الشرط التالي محقق:

$$\left.\begin{array}{l} x \wedge z = y \wedge z \\ x \vee z = y \vee z \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$$

- البرهان: لتكن E شبكة توزيعية ولنفرض أن: $x \wedge z = y \wedge z$ و $x \vee z = y \vee z$

فيمكن أن نكتب: $x \vee (y \wedge z) = x \vee (x \wedge z) = x$

$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \overset{\text{التوزيعية محققة}}{=} (x \wedge z) \vee y = (y \wedge z) \vee y$

$= y$

- وبما أن الشبكة توزيعية ينتج أن $x = y$.

- العكس: لنفرض الآن أن الشرط محقق ولنبرهن أن E توزيعية، وبما أن الشرط محقق حسب

المبرهنة الأخيرة تكون E معيارية.

فإذا أخذنا ثلاثة عناصر x, y, z من E وفرضنا أن:

$a = (x \wedge y) \vee (z \wedge (x \vee y))$, $b = (y \wedge z) \vee (x \wedge (y \vee z))$

بما أن E شبكة معيارية و $x \wedge y \leq x \vee y$ و $y \wedge z \leq y \vee z$ فإن:

$a = ((x \wedge y) \vee z) \wedge (x \vee y)$, $b = ((y \wedge z) \vee x) \wedge (y \vee z)$

$a \wedge y = ((x \wedge y) \vee z) \wedge (x \vee y) \wedge y \overset{\text{ماصة}}{=} ((x \wedge y) \vee z) \wedge y$

$\overset{\text{معيارية}}{=} (x \wedge y) \vee (z \wedge y)$

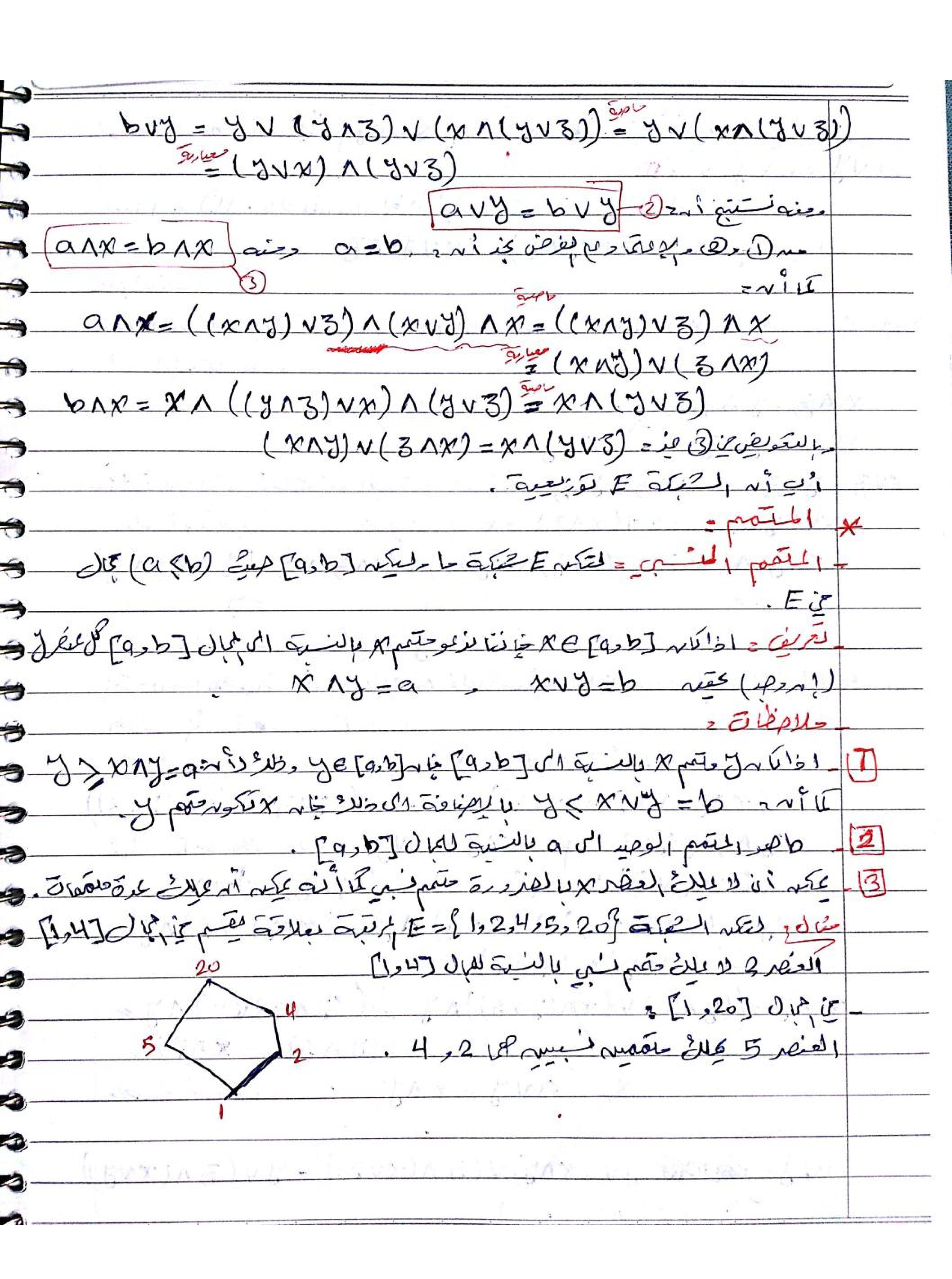
$b \wedge y = ((y \wedge z) \vee x) \wedge (y \vee z)) \wedge y \overset{\text{ماصة}}{=} ((y \wedge z) \vee x) \wedge y$

$= (y \wedge z) \vee (x \wedge y)$

ومنه نستنتج أن: $a \vee y = b \wedge y$ --- (1)

$a \vee y \overset{\text{تبديلية}}{=} y \vee (x \wedge y) \vee (z \wedge (x \vee y)) \overset{\text{ماصة}}{=} y \vee (z \wedge (x \vee y))$

$\overset{\text{معيارية}}{=} (y \vee z) \wedge (x \vee y)$



$b \vee y = y \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge (y \vee z)) \overset{\text{خاصية}}{=} y \vee (x \wedge (y \vee z))$

$\overset{\text{معيارية}}{=} (y \vee x) \wedge (y \vee z)$

ومنه نستنتج أن: $a \vee y = b \vee y$ ②

من ① و② مع الاعتماد على الفرض نجد أن: $a = b$ ، ومنه $a \wedge x = b \wedge x$ ③

كما أن:

$a \wedge x = ((x \wedge y) \vee z) \wedge (x \vee y) \wedge x \overset{\text{خاصية}}{=} ((x \wedge y) \vee z) \wedge x$

$\overset{\text{معيارية}}{=} (x \wedge y) \vee (z \wedge x)$

$b \wedge x = x \wedge ((y \wedge z) \vee x) \wedge (y \vee z) \overset{\text{خاصية}}{=} x \wedge (y \vee z)$

بالتعويض في ③ نجد: $(x \wedge y) \vee (z \wedge x) = x \wedge (y \vee z)$

أي أن الشبكة E توزيعية.

* المتمم:

- المتمم النسبي: لتكن E شبكة ما ولتكن $[a,b]$ حيث $(a \leq b)$ مجال في E.

- تعريف: إذا كان $x \in [a,b]$ فإننا ندعو متمم x بالنسبة إلى المجال $[a,b]$ كل عنصر y من $[a,b]$ (إن وجد) يحقق $x \vee y = b$ و $x \wedge y = a$

- ملاحظات:

1- إذا كان y متمم x بالنسبة إلى $[a,b]$ فإن $y \in [a,b]$ وذلك لأن: $y \geq x \wedge y = a$ كما أن $y \leq x \vee y = b$ بالإضافة إلى ذلك فإن x تكون متمم y.

2- b هو المتمم الوحيد لـ a بالنسبة للمجال $[a,b]$.

3- يمكن أن لا يملك العنصر x بالضرورة متمم نسبي كما أنه يمكن أن يملك عدة متممات.

مثال: لتكن الشبكة $E = \{1, 2, 4, 5, 20\}$ مرتبة بعلاقة يقسم في المجال $[1,4]$ العنصر 2 لا يملك متمم نسبي بالنسبة للمجال $[1,4]$

- في المجال $[1,20]$: العنصر 5 يملك متممين نسبيين هما 2، 4.

مبرهنة: لتكن E شبكة ما و [a,b] مجال في E و x عنصر ما من المجال [a,b]

- إذا كانت E معيارية فإن المتممات النسبية المختلفة للعنصر x تكون غير متقارنة فيما بينها.
- إذا كانت E توزيعية فإن x يملك على الأكثر متمم نسبي واحد.

البرهان:

إذا كان y_1 و y_2 متممين نسبيين للعنصر x فإن: $x \wedge y_1 = a = x \wedge y_2$

$x \vee y_1 = b = x \vee y_2$

ففي حالة المعيارية يؤدي الى أن ($y_1 = y_2$) أو y_1 و y_2 مختلفين وغير متقاربين (حسب المبرهنة).

وفي حالة التوزيعية يؤدي الى أن ($y_1 = y_2$) (حسب المبرهنة الأخيرة).

تعريف:

نقول عن شبكة أنها متممة نسبياً إذا كان في أي مجال [a,b] كل عنصر x يملك على الأقل متمم نسبي واحد.

الشبكة المتممة: سنفرض هنا أن الشبكة E تملك عنصر أكبر هو 1 وعنصر أصغر هو 0

تعاريف:

- إذا كانت $x \in E$ فإننا ندعو متمم x كل متمم له x بالنسبة للمجال [0,1].
- نقول عن E أنها شبكة متممة إذا كان كل عنصر من E يملك على الأقل متمم واحد.

ملاحظات:

1- المتمم x' للعنصر x (إن وجد) يكون معرفاً بالشكل: $x \vee x' = 1$ و $x \wedge x' = 0$

2- في الحالة العامة وجود المتمم ووحدانيته غير مؤكدتين.

أمثلة:

1- في السلسلة أي عنصر مختلف عن الصفر والواحد (0 و 1) لا يملك متمم.

2- في الشبكة $E = \{1, 2, 4, 5, 20\}$ المرتبة بعلاقة القسم:

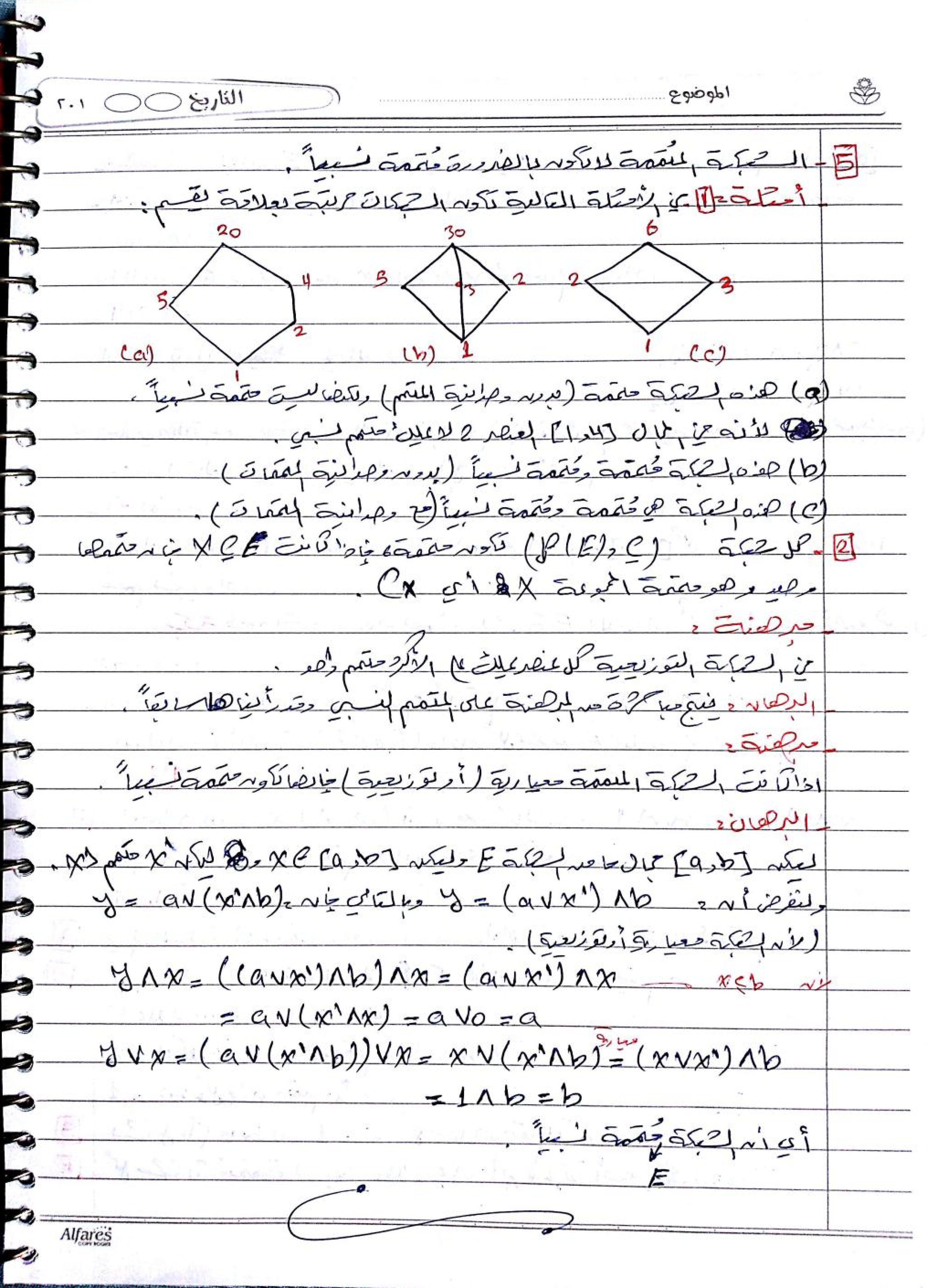
5 يملك متممين هما 2 و 4

2 و 4 كل منهما يملك متمم واحد هو 5.

1 و 20 كل منها متمم للآخر.

3- بشكل عام فإن 0 و 1 دائماً كل منهما هو متمم للآخر.

4- كل شبكة متممة نسبياً تملك عنصر أكبر وعنصر أصغر تكون متممة.



5- الشبكة المتممة لا تكون بالضرورة متممة نسبياً.

أمثلة: [1] في الأمثلة التالية تكون الشبكات مرتبة بعلاقة تقسيم:

(a) هذه الشبكة متممة (بدون وحدانية المتمم) ولكنها ليست متممة نسبياً.
لأنه في المجال [1,4] العنصر 2 لا يملك متمم نسبي.

(b) هذه الشبكة متممة ومتممة نسبياً (بدون وحدانية المتممات).

(c) هذه الشبكة هي متممة ومتممة نسبياً (مع وحدانية المتممات).

[2]- كل شبكة $(P(E), \subseteq)$ تكون متممة، فإذا كانت $X \in E$ فإن متممها وحيد وهو متممة المجموعة X أي C_X.

مبرهنة:

في الشبكة التوزيعية كل عنصر يملك على الأكثر متمم واحد.

البرهان: ينتج مباشرة من المبرهنة على المتمم النسبي وقد أثبتناها سابقاً.

مبرهنة:

إذا كانت الشبكة المتممة معيارية (أو توزيعية) فإنها تكون متممة نسبياً.

البرهان:

ليكن $[a,b]$ مجال ما من الشبكة E وليكن $x \in [a,b]$، وليكن x' متمم لـ x.
ولنفرض أن: $y = (a \vee x') \wedge b$ وبالتالي فإن $y = a \vee (x' \wedge b)$،
(لأن الشبكة معيارية أو توزيعية).

$$y \wedge x = ((a \vee x') \wedge b) \wedge x = (a \vee x') \wedge x \quad \leftarrow \; x \leq b \text{ لأن}$$
$$= a \vee (x' \wedge x) = a \vee 0 = a$$
$$y \vee x = (a \vee (x' \wedge b)) \vee x = x \vee (x' \wedge b) \overset{\text{معيارية}}{=} (x \vee x') \wedge b$$
$$= 1 \wedge b = b$$

أي أن الشبكة E متممة نسبياً.

* الشبكة ∧- متممة :

لتكن E شبكة تملك العنصر الأصغر (0) (إن التعريف التالي ينطبق أيضاً على وصف الشبكة الدنيا).

- تعريف : ليكن x عنصراً ما ، فإننا ندعو العنصر الأكبر (إن وجد) للمجموعة :

$\{y \in E ; x \wedge y = 0\}$ بـ ∧- متمم للعنصر x.

ندعو الشبكة ∧- متممة إذا كانت جميع عناصرها تملك ∧- متمم (وهو بالضرورة وحيد).

- مثال :

لتكن O شبكة المجموعات المفتوحة (مرتبة بالاحتواء) في فضاء طبولوجي ، هذه الشبكة في الحالة العامة تكون ∧- متممة

وذلك لأنه إذا كانت X مجموعة مفتوحة ، توجد أكبر مجموعة مفتوحة غير متقاطعة مع X وهي $Ext(X)$ ($Ext(X) = \overset{\circ}{C_{\bar{x}}}$).

- ملاحظات :

- بشكل مشابه يمكن أن نعرف الشبكة ∨- متممة إذا كان $x \in E$ فإننا نقول عن الحد الأدنى للمجموعة $\{y \in E ; x \vee y = 1\}$ بـ ∨- متمم للعنصر x.

- الشبكة المتممة ليست بالضرورة ∧- متممة.

مثال : في الشبكة $E = \{1, 2, 3, 5, 30\}$ مع علاقة القسم هي شبكة متممة (رأينا سابقاً) ولكنها ليست ∧- متممة وذلك لأنه من أجل العنصر (2) مثلاً :

العنصر الأصغر

$\{y ; 2 \wedge y = 1\} = \{3, 5\}$

لا تملك عنصر أكبر وبالتالي (2) لا تملك ∧- متمم ومنه فالشبكة ليست ∧- متممة.

30
5 3 2
1

- مبرهنة :

كل شبكة توزيعية E متممة تكون ∧- متممة.

- البرهان : لتكن E شبكة توزيعية متممة وليكن $x \in E$ اختياري و x' متمم x الوحيد.

فيكون $x \wedge x' = 0$ ولنفرض أن $(x \wedge y = 0)$ فيكون :

$(y \wedge x') \wedge x = y \wedge (x \wedge x') = y \wedge 0 = 0 = y \wedge x$

$(y \wedge x') \vee x = (y \vee x) \wedge (x' \vee x) = (y \vee x) \wedge 1 = y \vee x$

$\Rightarrow y \wedge x' = y \Rightarrow y \leq x'$

صب ⇐ مبرهنة سابقة

أي أن x' هو العنصر الأكبر للمجموعة $\{y \in E ; x \wedge y = 0\}$ وبالتالي فإن x يملك

٨- متمم ومنه نستنتج أن الشبكة E ، ٨- متممة.

- تمارين :

[1] لتكن $(E_i, \leq_i)$ أسرة من المجموعات المرتبة، حيث مجموعة الأدلة $I = \{1, 2, \dots, n\}$ (مرتبة بالترتيب الطبيعي)، ونعرف على مجموعة الجداء $E = \prod_{i \in I} E_i$ العلاقة R بالشكل التالي :

$$(x_i) R (y_i) \Leftrightarrow \begin{cases} x_i = y_i \text{ إما } & \text{من أجل } i \in I \\ x_k <_k y_k \text{ أو } & \text{حيث } k \text{ هو أصغر دليل يكون من أجله } x_k \neq y_k \end{cases}$$

(أ) برهن أن R هي علاقة ترتيب على E (والذي ندعوه بالترتيب المعجمي).

(ب) برهن أنه إذا كانت E_i سلسلة فإن E تكون أيضاً سلسلة مع الترتيب المعجمي.

(ج) لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية مع الترتيب الطبيعي، وضح بالرسم كلاً من الجملة مستعاضة :

$\mathbb{R}^2$: - مجموعة الحدود العليا لـ (x, y) في حالة ترتيب الجداء.

- " " " " لـ (x, y) " " " المعجمي.

- ملاحظة ترتيب المعجمي :

$$(1, 1, 1, 1) = (1, 1, 1, 1)$$

$$(1, 2, 3, 4) \geqslant (1, 2, 1, 5)$$

$$(1, 1, 1, 5) \geqslant (1, 1, 1, 1)$$

- الحل : (أ)

$$\forall (x_i) \in E = \prod_{i \in I} E_i \; ; (x_i) = (x_i) \Rightarrow (x_i) R (x_i)$$

أي أن R انعكاسية.

$$\forall (x_i), (y_i) \; ; (x_i) R (y_i) \;\&\; (y_i) R (x_i)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_i = y_i \; ; \forall i \in I \text{ إما } \\ x_k <_k y_k \;\&\; y_j <_j x_j \text{ أو } \end{cases} \Rightarrow (x_i) = (y_i)$$

حيث k هو أصغر دليل يكون من أجله $x_k \neq y_k$ ، j هو أصغر دليل يكون من أجله $x_j \neq y_j$

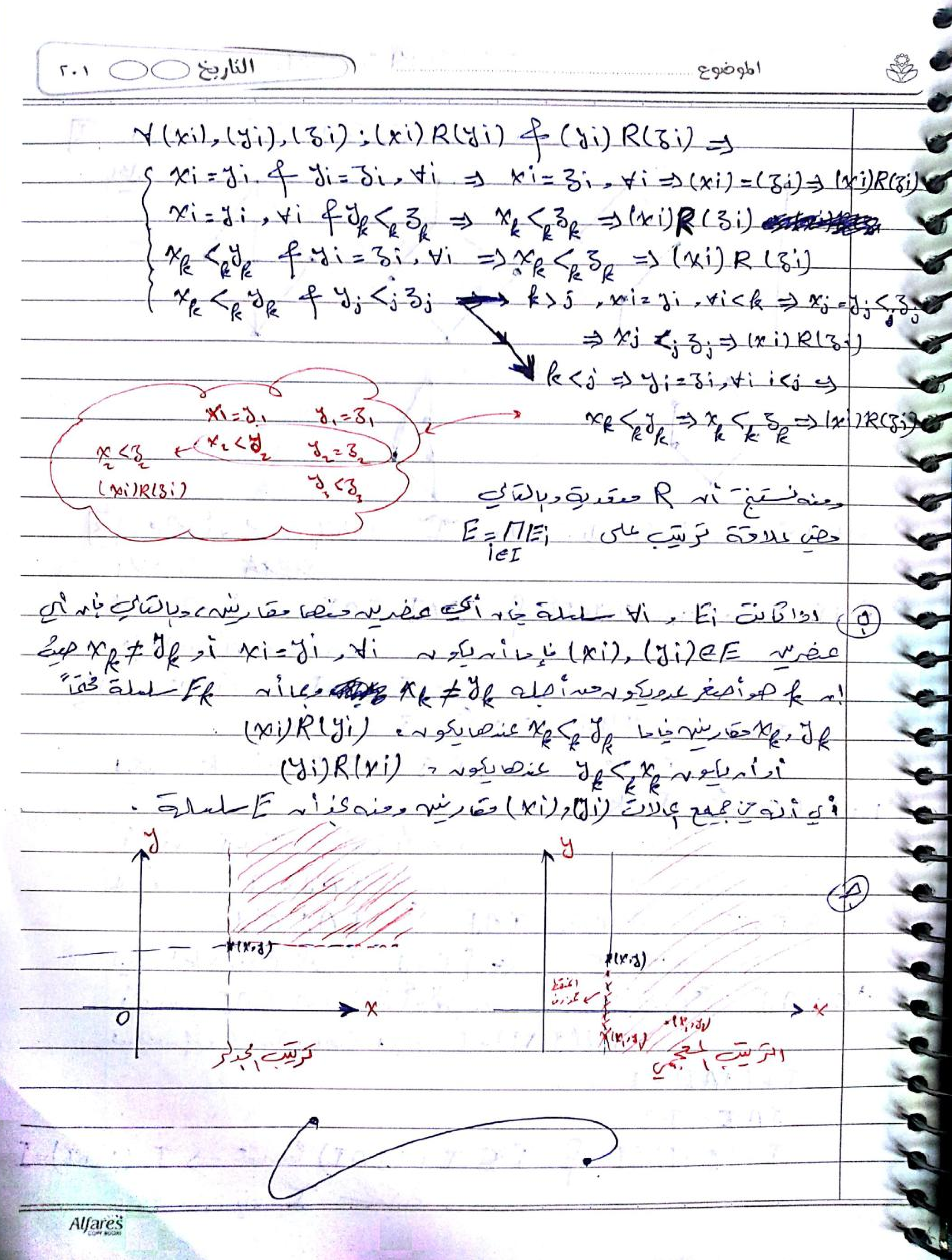
$$\Rightarrow k = j$$

$$\Downarrow$$

وهذا غير ممكن أي :

$$y_k <_k x_k \;\&\; x_k <_k y_k \Rightarrow x_i = y_i \; ; \forall i \in I \Rightarrow (x_i) = (y_i)$$

أي أن R تخالفية



$\forall (x_i),(y_i),(z_i) : (x_i)R(y_i)$ & $(y_i)R(z_i) \Rightarrow$

$x_i = y_i$ & $y_i = z_i, \forall i \Rightarrow x_i = z_i, \forall i \Rightarrow (x_i)=(z_i) \Rightarrow (x_i)R(z_i)$

$x_i = y_i, \forall i$ & $y_k <_k z_k \Rightarrow x_k <_k z_k \Rightarrow (x_i)R(z_i)$

$x_k <_k y_k$ & $y_i = z_i, \forall i \Rightarrow x_k <_k z_k \Rightarrow (x_i)R(z_i)$

$x_k <_k y_k$ & $y_j <_j z_j \Rightarrow k > j, x_i = y_i, \forall i < k \Rightarrow x_j = y_j <_j z_j$

$\Rightarrow x_j <_j z_j \Rightarrow (x_i)R(z_i)$

$k < j \Rightarrow y_i = z_i, \forall i\ i<j$ و

$x_k <_k y_k \Rightarrow x_k <_k z_k \Rightarrow (x_i)R(z_i)$

$x_1 = y_1$ $y_1 = z_1$
$x_2 < y_2$ $y_2 = z_2$
$x_2 < z_2$
$(x_i)R(z_i)$ $y_3 < z_3$

ومنه نستنتج أن R متعدية وبالتالي هي علاقة ترتيب على $E = \prod_{i \in I} E_i$

(ب) إذا كانت E_i ، $\forall i$ سلسلة فإن أي عنصرين منها مقارنين، وبالتالي فإن أي عنصرين $(x_i),(y_i) \in E$ فإما أن يكون $x_i = y_i, \forall i$ أو $x_k \neq y_k$ حيث k هو أصغر عدد يكون من أجله $x_k \neq y_k$ وبما أن E_k سلسلة فحتمًا x_k, y_k مقارنين فإما $x_k <_k y_k$ عندها يكون $(x_i)R(y_i)$ أو أن يكون $y_k <_k x_k$ عندها يكون $(y_i)R(x_i)$
أي أنه في جميع الحالات $(x_i),(y_i)$ مقارنين ومنه فإن E سلسلة.

(ج)



2 - ارسم جميع أشكال الشبكات ذات الخمسة عناصر :

الحل :

3 - برهن أن مجموعة المثاليات I في حلقة تبديلية تكون شبكة من أجل علاقة الاحتواء.

أي لنبرهن أن $I \vee J = I + J = \{x+y : x \in I, y \in J\}$ و $I \wedge J = I \cap J$

ثم برهن أنها معيارية.

الحل : واضح أن : $I \subseteq I+J$ ، $J \subseteq I+J$ ⇐ $I+J$ حد أعلى للمجموعة $\{I , J\}$

ليكن k حد أعلى للمجموعة $\{I , J\}$ ⇐ $I \subseteq k$ ، $J \subseteq k$ ⇐ $I+J \subseteq k+k = k$ (لأنها مغلقة بالنسبة للجمع)

أي أن $I+J$ هو حد أعلى أصغري.

كما أن $I \cap J \subseteq I$ ، $I \cap J \subseteq J$ ⇐ $I \cap J$ حد أدنى للمجموعة $\{I + J\}$

ليكن k' حد أدنى للمجموعة $\{I , J\}$ ⇐ $k' \subseteq I$ ، $k' \subseteq J$ ⇐ $k' \subseteq I \cap J$

أي أن $I \cap J$ هو حد أدنى أعظمي.

لنبرهن الآن الخاصية الماصية أي : $I \vee (J \wedge I) = I$

$I + (J \cap I) = I$

$J \cap I \subseteq I$

$I + (J \cap I) \subseteq I$ و $I \subseteq I + (J \cap I)$ محققة $\Rightarrow I + (J \cap I) = I$

ومنه فإن I شبكة.

لنبرهن أنها معيارية:

لنفرض أن $I \subseteq K$ ولنبرهن أن: $I \vee (J \wedge K) = (I \vee J) \wedge K$

أي لنبرهن أن: $I + (J \cap K) = (I + J) \cap K$

$$\left.\begin{array}{l} I+(J\cap K) \subseteq I+J \\ I+(J\cap K) \subseteq I+K \end{array}\right\} \Rightarrow I+(J\cap K) \subseteq (I+J)\cap(I+K)$$

$$= (I+J)\cap K \quad (\text{لأن } I \subseteq K)$$

$$\boxed{I+(J\cap K) \subseteq (I+J)\cap K}$$

$$\forall x \in (I+J)\cap K \Rightarrow x \in I+J \ \& \ x \in K \Rightarrow$$

$$\exists\, i \in I \ \& \ j \in J : x = i + j \ \& \ x \in K \Rightarrow j = x - i \in K + I =$$

$$i \in I \ \& \ j \in K \ \& \ j \in J \Rightarrow i \in I \ \& \ j \in J \cap K \Rightarrow$$

$$x = i + j \in I + (J \cap K)$$

ومنه نستنتج: $\boxed{(I+J)\cap K \subseteq I+(J\cap K)}$

ومن الاحتوائين تنتج المساواة وبالتالي فإن الشبكة I معيارية.

صفة

في الشبكة E نقول عن المرشحة F بأنها **أولية** إذا كان: $x \vee y \in F \Rightarrow x \in F$ أو $y \in F$

(أ) أعط مثالاً عن مرشحة أولية فعلية بحيث لا تكون فوق مرشحة.

(ب) أعط مثالاً عن فوق مرشحة لا تكون مرشحة أولية.

(ج) أثبت أنه في الشبكة التوزيعية كل فوق مرشحة تكون مرشحة أولية.

الحل:

(أ) في الشبكة ~~[illegible]~~ السلسلة المؤلفة من أربعة عناصر أو أكثر

إن $F = \{c, d\}$ هي مرشحة أولية ولكنها ليست مرشحة أعظمية (لأنه توجد مرشحة $F' = \{b, c, d\}$ أكبر منها) وبالتالي فهي ليست فوق مرشحة.

(ب) في الشبكة $E = \{1, 2, 3, 5, 30\}$ مع علاقة القسمة:

إن المرشحة الفعلية $F = \{5, 30\}$ هي فوق مرشحة ولكنها ليست أولية لأن: $2 \vee 3 = 30 \in F$ بالرغم من أن:

$$3 \notin F \ \& \ 2 \notin F$$

يجوز أن نأخذ مرشحات: $\{2, 30\}$ أو $\{3, 30\}$



ح) بفرض أن E شبكة توزيعية وأن F مثالية أولية فقط.

ولكن $x \vee y \in F$ ولنفرض جدلاً أن $x \notin F$ & $y \notin F$

(حسب مبرهنة سابقة): إذا كانت F مثالية أولية غير أولية

$x \notin F$ توجد $x' \in F$ بحيث يكون $x \wedge x' = 0$

$$x' \wedge (x \vee y) = (x' \wedge x) \vee (x' \wedge y) = 0 \vee (x' \wedge y) = x' \wedge y \in F$$

$F \ni$

لأن: $(F \ni x' \wedge (x \vee y))$

$x' \wedge y \leq y \notin F$

وهذا تناقض مع الفرضية لأن F مثالية وهي

$$(\; y \in F \Leftarrow x \wedge y \leq y \;\; \& \;\; x \wedge y \in F \;)$$

وبالتالي فالفرض الجدلي خاطئ أي أنه إما $x \in F$ أو $y \in F$ وبالتالي تكون F أولية.

5-

لتكن E شبكة ولنعرف تطبيقين من E^3 إلى E بالشكل:

$$f(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$$

$$g(x, y, z) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$$

أ) برهن أنه إذا كانت E توزيعية فإن $f = g$.

ب) العكس إذا كان $f = g$ برهن أن E توزيعية. (عكسية برهن أولاً أنها معيارية ومن ثم نلاحظ المساواة: $(x \wedge f(x, y, z) = x \wedge g(x, y, z)$

الحل:

أ)

$$f(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$$

$$\overset{\text{توزيعية}}{=} [x \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)] \wedge [y \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)]$$

$$\overset{\text{خاصية}}{=} [x \vee (y \wedge z)] \wedge [y \vee (z \wedge x)]$$

$$\overset{\text{توزيعية}}{=} (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z) \wedge (y \vee x) .$$

$$f(x, y, z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z) = g(x, y, z)$$

ب) لنفرض أن $f = g$ لنبرهن أولاً أن E معيارية ، من أجل ذلك لنفرض أن $x \leq z$.

$$f(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$$

$= x$

$= (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee x = x \vee (y \wedge z)$ ماصة

$g(x, y, z) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$

$= (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge z = (x \vee y) \wedge z$

ومنه بما أن $f = g$ نجد: $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$

أي أن الشبكة E معيارية.

$x \wedge f(x, y, z) = x \wedge [(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)]$

تبديلية $= [(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)] \wedge x$

معيارية $= (x \wedge y) \vee [((z \wedge x) \vee (y \wedge z)) \wedge x]$

$= (x \wedge y) \vee [(z \wedge x) \vee ((y \wedge z) \wedge x)]$

$= [(x \wedge y) \vee (z \wedge x) \vee [(y \wedge z) \wedge x]] = (x \wedge y) \vee (z \wedge x)$

$z \wedge x$

$x \wedge g = x \wedge [(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)] = x \wedge (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$

$= x \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = x \wedge (y \vee z)$

$f = g \Rightarrow x \wedge f = x \wedge g \Rightarrow (x \wedge y) \vee (z \wedge x) = x \wedge (y \vee z)$

ومنه نستنتج أن الشبكة توزيعية.

6

لتكن I مثالية من الشبكة E لنعرف العلاقة R في E بالشكل التالي:

$xRy \Leftrightarrow \exists a \in I : x \vee a = y \vee a$

(P) برهن أن R علاقة تكافؤ في E، ولنرمز بـ E/I لمجموعة القسمة.

(ب) برهن أن العلاقة R متوافقة مع العملية $\vee$ أي أنه إذا كان xRx' و yRy' فإن $(x \vee y) R (x' \vee y')$.

(ح) استنتج أنه يمكن بناء الصف شبكة عليا على E/I.

(د) إذا كانت E توزيعية، فبرهن أن R هي أيضا متوافقة مع $\wedge$، ومنها نستنتج بناء شبكة القسمة E/I.

الحل

(P) $\forall x \in E, \forall a \in I$ فإن $x \vee a = x \vee a \Rightarrow xRx$ (R انعكاسية)

نفرض أن $xRy \Leftarrow$ توجد $a \in I$ بحيث يكون $x \vee a = y \vee a \Leftarrow$

يوجد $a \in I$ بحيث يكون $y \vee a = x \vee a \Rightarrow yRx$

$\Leftarrow$ (R تناظرية).

لعكس xRy & $yRz \Rightarrow$ يوجد $a, b \in I$ بحيث يكون

$x \vee a = y \vee a$ & $y \vee b = z \vee b$

ولنأخذ $x \vee (a \vee b) = (x \vee a) \vee b = (y \vee a) \vee b = (y \vee b) \vee a = (z \vee b) \vee a$

$= z \vee (a \vee b)$

أي أنه أوجدنا لعنصر $a \vee b \in I$ (لأن I مثالية) بحيث يكون

$x \vee (a \vee b) = z \vee (a \vee b) \Rightarrow xRz \Rightarrow$ (R متعدية)

وبالتالي فإن R علاقة تكافؤ على E.

(ب) نفرض أن xRx' & yRy' $\Rightarrow$ يوجد $a, b \in I$ بحيث يكون

$x \vee a = x' \vee a$ & $y \vee b = y' \vee b'$

$(x \vee y) \vee (a \vee b) = (x \vee a) \vee (y \vee b) = (x' \vee a) \vee (y' \vee b)$

$= (x' \vee y') \vee (a \vee b) \Rightarrow (x \vee y) R (x' \vee y')$

أي أن R متوافقة مع العملية $\vee$.

(ج) اذا عرفنا على E/I العملية $\vee$ بالشكل الآتي: $\tilde{x} \vee \tilde{y} = \widetilde{x \vee y}$

حيث $\tilde{x} \in E/I$ أي صف تكافؤ العنصر x.

$\tilde{x} \vee \tilde{x} = \widetilde{x \vee x} = \tilde{x}$ (الجامدية محققة).

$\tilde{x} \vee \tilde{y} = \widetilde{x \vee y} = \widetilde{y \vee x} = \tilde{y} \vee \tilde{x}$ (التبديلية محققة).

$\tilde{x} \vee (\tilde{y} \vee \tilde{z}) = \tilde{x} \vee (\widetilde{y \vee z}) = \widetilde{x \vee (y \vee z)} = \widetilde{(x \vee y) \vee z} =$

$= (\widetilde{x \vee y}) \vee \tilde{z} = (\tilde{x} \vee \tilde{y}) \vee \tilde{z}$ (والتجميعية)

أي أن العملية $\vee$ تعرف علاقة ترتيب على E/I بالشكل:

$\tilde{x} \leq \tilde{y} \Leftrightarrow \tilde{x} \vee \tilde{y} = \tilde{y}$

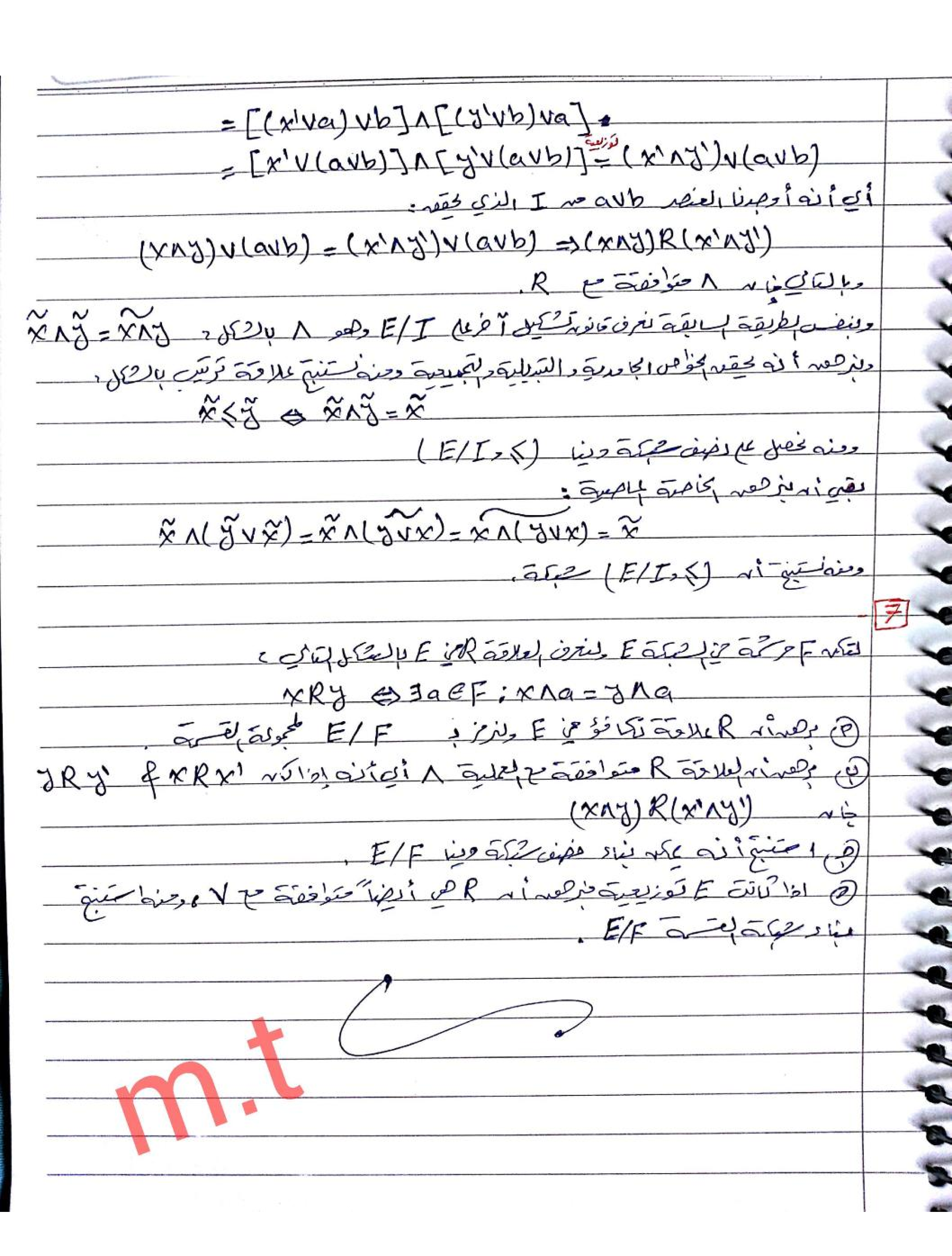
وبالتالي فإن $(E/I ; \leq)$ تشكل نصف شبكة عليا.

(د) نفرض أن E توزيعية وأن xRx' & $yRy' \Rightarrow$ يوجد $a, b \in I$

بحيث يكون $x \vee a = x' \vee a$ & $y \vee b = y' \vee b$

$(x \wedge y) \vee (a \vee b) \overset{\text{توزيعية}}{=} [x \vee (a \vee b)] \wedge [y \vee (a \vee b)]$

$= [(x \vee a) \vee b] \wedge [(y \vee b) \vee a]$



$$= [(x'\vee a)\vee b]\wedge[(y'\vee b)\vee a]$$

$$= [x'\vee(a\vee b)]\wedge[y'\vee(a\vee b)] \overset{\text{توزيعية}}{=} (x'\wedge y')\vee(a\vee b)$$

أي أنه أوجدنا العنصر $a\vee b$ من I الذي يحقق:

$$(x\wedge y)\vee(a\vee b) = (x'\wedge y')\vee(a\vee b) \Rightarrow (x\wedge y)R(x'\wedge y')$$

وبالتالي فإن $\wedge$ متوافقة مع R.

وبنفس الطريقة السابقة نعرف قانون تشكيل آخر على E/I وهو $\wedge$ بالشكل: $\tilde{x}\wedge\tilde{y}=\widetilde{x\wedge y}$

ونبرهن أنه يحقق الخواص الجامدية والتبديلية والتجميعية ومنه نستنتج علاقة ترتيب بالشكل:

$$\tilde{x}\le\tilde{y} \Leftrightarrow \tilde{x}\wedge\tilde{y}=\tilde{x}$$

ومنه نحصل على نصف شبكة دنيا $(E/I, \le)$

بقي أن نبرهن الخاصية الماصة:

$$\tilde{x}\wedge(\tilde{y}\vee\tilde{x}) = \tilde{x}\wedge(\widetilde{y\vee x}) = \widetilde{x\wedge(y\vee x)} = \tilde{x}$$

ومنه نستنتج أن $(E/I, \le)$ شبكة.

[7]

لتكن F جزئية من الشبكة E ولنعرف العلاقة R في E بالشكل التالي:

$$xRy \Leftrightarrow \exists a\in F : x\wedge a = y\wedge a$$

(أ) برهن أن R علاقة تكافؤ في E ولنرمز بـ E/F للمجموعة القسمة.

(ب) برهن أن العلاقة R متوافقة مع العملية $\wedge$ أي أنه إذا كان xRx' و yRy' فإن $(x\wedge y)R(x'\wedge y')$

(ج) استنتج أنه يمكن بناء نصف شبكة دنيا E/F.

(د) إذا كانت E توزيعية فبرهن أن R هي أيضاً متوافقة مع $\vee$ ومنها نستنتج بناء شبكة القسمة E/F.